

線形代数学: 行列の基本変形のやり方

線形代数学において、『基本変形』と呼ばれる操作はとても重要です. 例えば, 以下の3つの問題は, 基本的には『基本変形を繰り返し行う』ことで解くことができます:

Problem 1: 連立一次方程式を解く問題

Problem 2: 逆行列を求める問題

Problem 3: 行列式を求める問題

1.2 行列の基本変形のやり方

行列の基本変形は次で定義されます.

定義 1.2.1 (行列の基本変形). 行列の次の3つの変形を行基本変形という:

- (1) 1つの行を a ($\neq 0$) 倍する.
- (2) 2つの行を入れ替える.
- (3) 1つの行に他の行の a 倍を加える.

これらの3つの変形において, 「行」を「列」に置き換えたものを列基本変形という.

Note 1.2.2. 問題1では, 『行』基本変形のみを用います. 問題2では, 『行』基本変形のみ, 或いは, 『列』基本変形のみを用います. 問題3では, どちらの基本変形も用います.

ここで, 3つの基本変形について, 具体的な変形を見てみましょう. 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ とします.

(1) の変形: 1行目を a ($\neq 0$) 倍すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2a & 3a & 8a \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) の変形: 1行目と2行目を入れ替えると

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

(3) の変形: 2行目に1行目の a 倍を加えると

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1+2a & 2+3a & 5+8a \end{bmatrix}$$

となります。『列』基本変形についても同様です。
 こういった基本変形を繰り返し行って、行列を変形させていくわけですが、何かしらの『目標 (ゴール)』が無ければ、どのような変形を行えばよいかわかりません。そのため、次に『目標 (ゴール)』となる行列を定義します。それが次の『簡約行列』です。

定義 1.2.3 (簡約行列).

- 0 でない成分を含む行において、左から数えて最初の 0 でない成分をその行の主成分という。
- 次の (I) ~ (IV) の条件を満たす行列を簡約行列という：
 - (I) 成分がすべて 0 の行は、0 でない成分を含む行よりも下にある。
 - (II) 0 でない成分を含む行の主成分は 1 である。
 - (III) 各行の主成分は、下の行ほど右にある。
 - (IV) 各行の主成分を含む列の主成分以外の成分は全て 0 である。

簡約行列は言葉で書くと複雑でわかりづらいと思いますが、次の例を見るとその感覚がつかめると思います。

Example 1.2.4 (Reduced Matrix Example).

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

それでは、与えられた行列を『目標 (ゴール)』である『簡約行列』に変形していくアルゴリズムを紹介します。基本変形を繰り返して簡約行列にすることを簡約化といいます。

簡約化の手順

- Step 1： 各行の主成分のうち、一番左にあるものを含む行の一つを『行基本変形の (2)』で 1 行目にする。
- Step 2： 1 行目の主成分を『行基本変形の (1)』で 1 にする。
- Step 3： 1 行目の主成分を含む列のその主成分以外の成分を『行基本変形の (3)』で 0 にする。
- Step 4： 2 行目以下、3 行目以下で、Step 1 ~ Step 3 を繰り返す。

実際に、先程の行列を簡約化してみましょう： $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

1 行目の主成分は (1, 1) 成分の 2 であり、2 行目の主成分は (2, 1) 成分の 1 ですので、Step 1 を行う必要はありませんが、Step 2 以降の計算を簡単にするために、1 行目と 2 行目を入れ変えます。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} =: A_1$$

A1 の 1 行目の主成分は 1 ですから, Step 2 を行う必要はありません. 次に, Step 3 を行います. A1 の (1, 1) 成分 1 の下の 2 を 0 にするために, 2 行目に 1 行目の (-2) 倍を加えます.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2+1(-2) & 3+2(-2) & 8+5(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} =: A_2$$

これで, 1 行目の操作は終わりです. 続いて, Step 4, すなわち, 2 行目の操作にうつります. 3 行目以下は存在しませんので,

Step 1 を行う必要はありません. 次に, Step 2 を行います. 2 行目の主成分 -1 を 1 にしたいので, 2 行目に (-1) を掛けます.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0(-1) & -1(-1) & -2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =: A_3$$

次に, Step 3 を行います. A3 の (2, 2) 成分 1 の上の 2 を 0 にするために, 1 行目に 2 行目の (-2) 倍を加えます.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+0(-2) & 2+1(-2) & 5+2(-2) \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =: A_4$$

以上の基本変形で得られた行列 A4 は確かに簡約行列になっていることが確かめられます.

>> 章末問題：次の行列を簡約化してください.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

解答：

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$